第3講　加法定理について…

3 次の各問いに答えよ．

(1) $\cos\frac{2}{7}\pi$ の小数第1位の数が6であることを示せ．

(2) n を自然数とするとき

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　加法定理について…

3　n を自然数とするとき

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　加法定理について…

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\cos\frac{2}{7}\pi$ の小数第1位の数が6であることを示せ．

(2)　n を自然数とするとき

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

【答】　略

【解答】

(1)　$\theta=\frac{2}{7}\pi$ とすると $7\theta=2\pi$　よって $\cos 3\theta=\cos(2\pi-4\theta)=\cos 4\theta$　これより

$$\cos 3\theta=\cos 4\theta$$
$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$
$$8\cos^4\theta-4\cos^3\theta-8\cos^2\theta+3\cos\theta+1=0$$
$$(\cos\theta-1)(8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1)=0$$

ここで $0<\cos\theta=\cos\frac{2}{7}\pi<1$ より，$x=\cos\frac{2}{7}\pi$ は $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の正の解であることがわかる．また

$$g(x)=8x^3+4x^2-4x-1$$

とおくと，$g(-1)=g(0)=-1<0$，$g\left(-\frac{1}{2}\right)=1>0$ 及び $g(x)=4x(2x^2+x-1)-1$ より

$$g(0.6)=2.4(0.72+0.6-1)-1=-0.232<0$$
$$g(0.7)=2.8(0.98+0.7-1)-1=0.904>0$$

であるから，$g(x)=0$ は $-1<x<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<x<0$，$0.6<x<0.7$ の範囲にそれぞれ1つずつ実数解をもつ．

よって

$$0.6<\cos\frac{2}{7}\pi<0.7$$

となるので，$\cos\frac{2}{7}\pi$ の小数第1位の数は6である．

(2)　$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1+\cos\theta,\ (\text{右辺})=\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

より与式は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$n=k(\geqq 1)$ のとき

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos k\theta=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を仮定すると

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos k\theta+\cos(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos(k+1)\theta-\frac{\left(\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\cos\frac{k}{2}\theta-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{k+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos(k+1)\theta-\cos^2\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\cos\frac{k}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{k}{2}\theta\right)+\cos(k+1)\theta-\cos^2\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=\sin^2\frac{k+1}{2}\theta+\cos(k+1)\theta-\cos^2\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=0$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つ．

　よって数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して与式は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　加法定理について…

3　n を自然数とするとき

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

【答】　略

【解答】

$n=1$ のとき，(左辺)$=\sin\theta$，(右辺)$=\dfrac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\sin\theta$ より与式は成り立つ．

$n=k(\geqq1)$ のとき

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin k\theta=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を仮定すると

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin k\theta+\sin(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\sin(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\sin(k+1)\theta-\frac{\left(\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\sin\frac{k}{2}\theta-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{k+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}+\sin(k+1)\theta-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\sin\frac{k}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{k}{2}\theta\right)+\sin(k+1)\theta-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta+\sin(k+1)\theta-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=0$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つ．

よって数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して与式は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。